

Многочлены: асимптотика и непрерывность

17 июля

1. Дан многочлен с вещественными коэффициентами $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$.

(а) Докажите, что $f(x)$ — непрерывная функция.

(б) Докажите, что отношение $f(x)/(a_n x^n)$ стремится к единице при x , стремящемся к бесконечности.

(в) Докажите, что любой многочлен нечётной степени принимает положительные и отрицательные значения, а также имеет хотя бы один корень.

2. Докажите, что для любого многочлена со старшим коэффициентом, равным 1, найдётся момент, начиная с которого его значения строго возрастают.

3. Существует ли квадратный многочлен, значения которого во всех целых точках — кубы натуральных чисел?

4. Даны многочлены $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Докажите, что при любых действительных a и b , сумма которых не равна 0, многочлен $af(x) + bg(x)$ имеет три различных действительных корня.

5. (а) Пусть $P(x)$ — многочлен нечётной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

(б) Дан многочлен $P(x)$, для которого уравнение $P(x) = x$ не имеет корней. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = x$ тоже не имеет корней.

6. Даны два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ с вещественными коэффициентами, причём у обоих старшие коэффициенты положительны. Известно, что при любом вещественном значении y числа $P(y)$ и $Q(y)$ либо одновременно целые, либо одновременно нецелые. Докажите, что $P(x) - Q(x) = \text{const}$.

7. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, который принимает положительные значения при $x \geq 1$. Докажите, что бесконечная десятичная дробь

$$\alpha = 0, f(1)f(2) \dots f(n) \dots$$

является иррациональным числом. Например, если $f(x) = x^2$, то получается иррациональное число $\alpha = 0,149162536496481100 \dots$

8. Существует ли бесконечная последовательность a_0, a_1, a_2, \dots ненулевых вещественных чисел, такая что при всех натуральных n многочлен

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

имеет ровно n различных вещественных корней?